Problem 1

长度为12且不包含“11”子串的二进制串最多可含有12/2=6个1

分别考虑含有6, 5, 4, 3, 2, 1, 0个1的情况可得这样的二进制串总数为

C(7, 6)+C(8, 5)+C(9, 4)+C(10, 3)+C(11, 2)+C(12, 1)+C(13, 0) =

7 + 56 + 126 + 120 + 55 + 12 + 1 = 377.

Problem 2

该问题可转化为求方程x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7 = 32的解的个数(xi是正整数),

即y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7 = 25的解的个数(yi是非负整数).

则方程解的个数为C(7+25-1, 25) = C(31, 25) = C(31, 6) = 736281.

Problem 3

该问题可转化为求方程x1+x2+x3=20 (x1≥2, x3≤10)的解的个数.

即方程y1+y2+y3=18解的个数减去z1+z2≤9 (同w1+w2+w3=9)解的个数.

放置的方法有C(3+18-1, 18) – C(3+9-1, 9) = C(20, 2) – C(11, 2) = 135种.

Problem 4

正方形共用三种颜色的涂法有A(10, 3) = 10×9×8 = 720种.

正方形共用两种颜色的涂法有C(10, 2)×C(2, 1) = 10×9 = 90种.

则不同旗帜的个数为720×7×7×7 + 90×8×8×8 = 293040.

Problem 5

a) 1×C(9, 5)×A(6, 6) = 1×126×720 = 90720

b) 1×C(8, 4)×A(6, 6) = 1×70×720 = 50400

c) 2×C(8, 5)×A(6, 6) = 2×56×720 = 80640

Problem 6

由一个正n边形的顶点构成的三角形有C(n, 3) = n(n-1)(n-2)/6个.

如果正n边形的边不能是构成三角形的边，这样的三角形有0个(n=3),

C(n, 3) – n – n×(n-4) = n(n-1)(n-2)/6 – n(n-3) = n(n^2-9n+20)/6个(n≥4).

Problem 7

有450+622+30-111-14-18+9 = 968名申请人不合格,

则有1000-968 = 38名申请人合格.

Problem 8

设P(n)是命题|∪n i=1 Ai| = ∑n i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij|.

基础步骤: 当n=2时, 易知|A∪B| = |A| + |B| - |A∩B|, P(2)成立.

归纳步骤: 当n>2时, 假设P(n-1)成立, 即

|∪n-1 i=1 Ai| = ∑n-1 i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij|.

|∪n i=1 Ai| = |(∪n-1 i=1 Ai)∪An| = |∪n-1 i=1 Ai| + |An| - |(∪n-1 i=1 Ai)∩An|

= |∪n-1 i=1 Ai| + |An| - |∪n-1 i=1 (Ai∩An)|

= ∑n-1 i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij| + ∑n i=1 |Ai| + ∑n-1 i=2 (-1)^(i-1)

∑1≤i1<i2<…<ik-1≤n-1 |∩i-1 j=1 Aij∩An| + (-1)^(n-1)|∩n i=1 Ai|

= ∑n-1 i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij| + ∑n i=1 |Ai| + (-1)^(n-1)|∩n i=1 Ai|

= ∑n i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij|.

根据数学归纳法可知对所有不小于2的正整数n, P(n)为真.

得出结论: ∀n∈N且n≥2, |∪n i=1 Ai| = ∑n i=1 (-1)^(i-1) ∑1≤i1<i2<…<ik≤n |∩i j=1 Aij|.

Problem 9

a) 若四个人拿到正确的帽子, 第五个人只能拿到自己的帽子, 概率: 1/5! = 120.

b) 五个人的帽子都拿错的概率: 1/1 – 1/1 + 1/2 – 1/6 + 1/24 – 1/120 = 11/30.

c) 超过一个人拿到正确的帽子的概率: 1 – 11/30 – 3/8 = 61/120.